НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Data Analysis National Olympiad - DANO

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Илья Слаболицкий
Матвей Зехов

Москва, 2021

ОТ ВЫБОРКИ К ДАННЫМ

Как связаны между собой выборка и данные?

- Предположим, что мы при помощи некоторого способа получили выборку из индивидов и на ее основе провели опрос. Результаты опроса – это наши **данные** (data). Что же представляют собой полученные данные?
- Чаще всего, это таблица. Строки таблицы – это опрошенные индивиды (их $\boldsymbol{n}$ человек, ровно столько элементов в выборке), а столбцы таблицы – это те вопросы, которые индивидам задавали в ходе опроса. Соответственно, ячейки внутри таблицы – это ответ определенного индивида на определенный вопрос.

Номер индивида	**Какой у Вас пол?**	**Сколько Вам полных лет?**	**…**	**Какой ежемесячный доход (тыс. руб.) удовлетворил бы Ваши ежемесячные потребности?**
Индивид 1	Мужской	39	…	73.5
Индивид 2	Женский	21	…	93.0
…	…	…	…	…
Индивид $\boldsymbol{n}$	Мужской	48	…	48.5

ОТ ДАННЫМ К МОДЕЛИ

Для чего нам нужны полученные данные?

Исследователи используют данные, чтобы строить модели. **Модель** (model) – это некоторая формула, которая связывает зависимую (объясняемую) переменную с одной или несколькими независимыми (объясняющими) переменными.

Продажа мороженого в летние дни

Номер дня	Доход с продаж за день	Температура воздуха
День 1	53.48	24.57
День 2	62.52	26.01
…	…	…
День 500	65.57	28.96

Данные по доходам с продажи мороженого. *Источник: Kaggle*

График зависимости между температурой воздуха и доходом

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДАННЫХ

Крайне удобный способ отображения наших данных – это точечный график или **диаграмма рассеяния** (scatter plot).

По горизонтальной оси отложены наблюдения, относящиеся к независимой переменной, по вертикальной – к зависимой.

Точки на графике – это пара объектов (независимая переменная и зависимая переменная) по каждому элементу выборки.

Диаграмма рассеяния с положительной линейной связью между двумя переменными

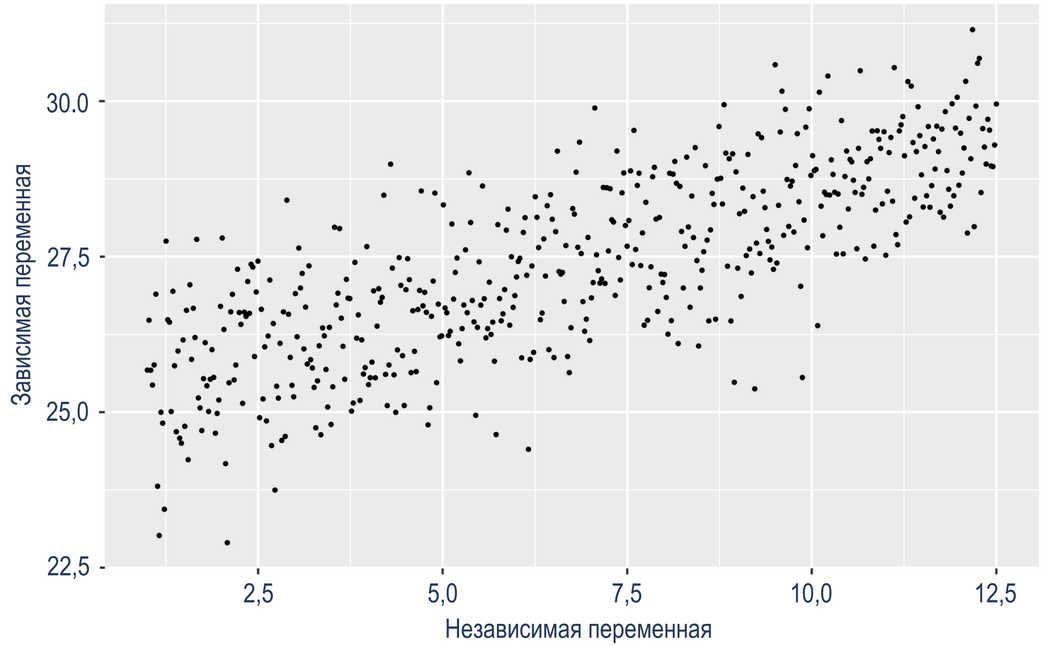


Диаграмма рассеяния с отрицательной линейной связью между двумя переменными

Теперь мы готовы строить модель!

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ

Линейная регрессионная модель

- Самая простая функция, которую только можно себе представить, – это линейная функция.

  Предположим, что наши данные можно описать следующей формулой:

$$\boldsymbol{y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon}.$$

- Такой простейший вид модели называется парной линейной регрессией или линейной регрессией с одной объясняющей переменной.

- Что это за красивая греческая буква $\boldsymbol{\varepsilon}$ (читается «эпсилон»)?

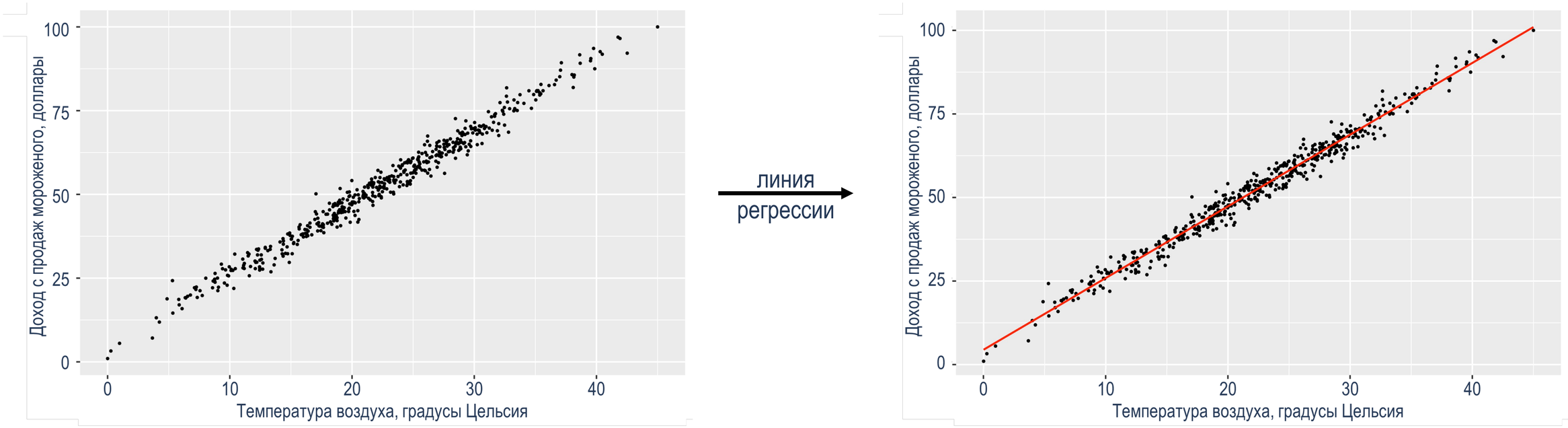
  $\boldsymbol{\varepsilon}$ – это такой набор факторов, который как-то влияет на $\boldsymbol{y}$, но который мы не включили в модель.

- $\boldsymbol{\beta_0}$ показывает усредненный вклад в величину зависимой переменной $\boldsymbol{y}$ не включенных в модель переменных $\boldsymbol{\varepsilon}$.
- $\boldsymbol{\beta_1}$ позволяют нам интерпретировать влияние переменной $\boldsymbol{x}$ на переменную $\boldsymbol{y}$: при увеличении переменной $\boldsymbol{x}$ на 1 у.е. переменная $\boldsymbol{y}$ увеличится на $\boldsymbol{\beta_1}$ у.е.

- Линейную модель можно также использовать для прогнозирования!

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ

Так что там с мороженым?



В данном примере уравнение регрессии имеет следующий вид:

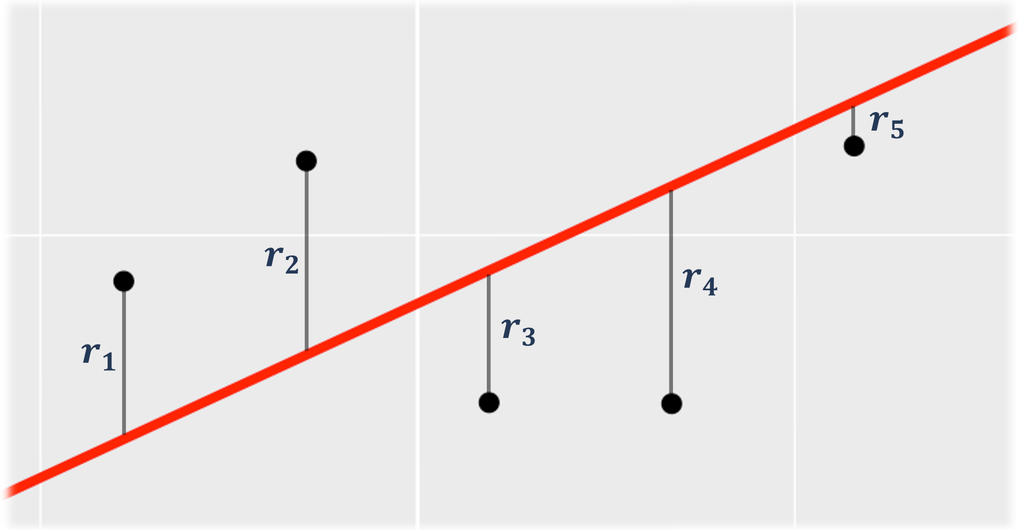
$$income = 44.83 + 22.44 \cdot temperature\ .$$

Как мы построили прямую?

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Метод, при помощи которого мы получили уравнение прямой (которая, кстати, называется линией тренда), именуется **методом наименьших квадратов** или **МНК** (least squares).

Идея метода: провести прямую линию через набор точек так, чтобы суммарное отклонение от этой линии до каждой из точек было минимальным. Но не все так просто.

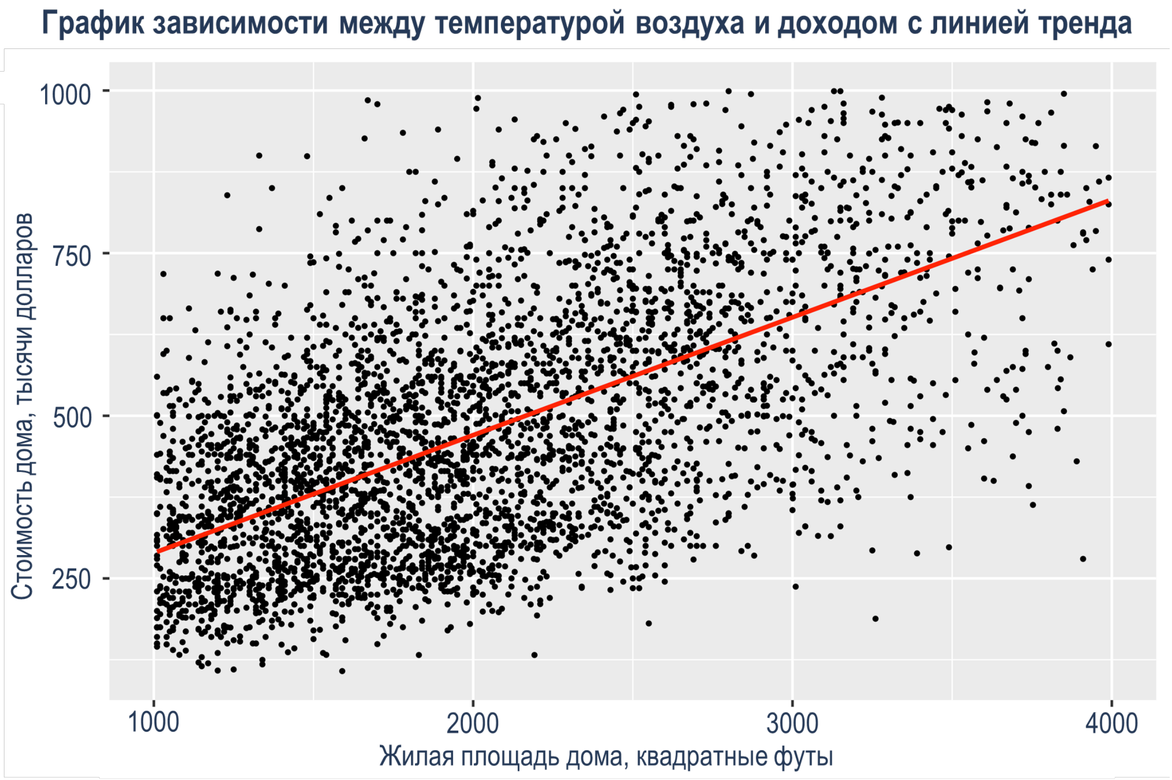


- Минимизация суммы $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5$ — это плохой вариант.
- Минимизация суммы $|r_1| + |r_2| + |r_3| + |r_4| + |r_5|$ — это хороший с точки зрения здравого смысла вариант, но плохой с точки зрения математики.
- Минимизация суммы $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2$ — это отличный вариант!

ПРИМЕР НА РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Данные представляют собой выборку домов в одном из штатов США в 2018 году (Kaggle). Данные содержат большое количество переменных, включая цену дома, расстояния до ближайшей автобусной станции, информацию о соседях и так далее.

Рассмотрим зависимость между стоимостью дома и жилой площадью дома.



ПРИМЕР НА РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В данном примере в соответствии с МНК уравнение прямой имеет вид:

$$\boldsymbol{price = 144.20 + 0.17 \cdot living\_square}.$$

Какую информацию мы можем отсюда достать?

- Коэффициент $\boldsymbol{\beta_1}$ равен $\boldsymbol{0.17}$, что говорит о положительном влиянии жилой площади на цену дома: при увеличении жилой площади на 1 квадратный фут цена вырастет в среднем на 170 долларов.
- Средний вклад не включенных в модель переменных в стоимость дома равен 144.20.
- Прогноз цены дома. Илон Маск присматривает новый дом площадью 398.26 квадратных футов.
  Наша модель утверждает, что цена такого дома составит $\boldsymbol{144.20 + 0.17 \cdot 398.26 = 211.90}$.
- Вывод: Илон Маск сделал правильный выбор :)

График зависимости между температурой воздуха и доходом с линией тренда

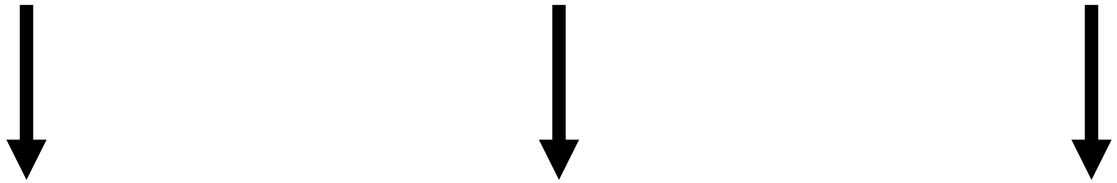
НЕУЖЕЛИ ВСЕ ТАК ПРОСТО?

Линейная регрессионная модель кажется весьма простым инструментом. Так ли это?

С математической точки зрения, регрессия – это достаточно сложный инструмент.

При работе с регрессией исследователь сталкивается с большим количеством проблем:

- большой выбор методов, при помощи которых можно получить значения коэффициентов регрессионного уравнения
- грамотный выбор функциональной формы модели
- пагубное влияние на результаты исследования не включенных в модель переменных



эконометрика

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Электронная почта для связи: islabolitskiy@hse.ru